Prof. Dr. Alfred Toth

Die diesseitige Transzendenz der Zeichen

1. Wenn man die Menge der natürlichen Zahlen auf eine ihrer Teilmengen abbildet:

1 2 3 4 5 ...

↑ ↑ ↑ ↑ ↑

1 3 5 7 9 ...

1 2 3 4 5 ...

↑ ↑ ↑ ↑ ↑

2 4 6 8 10 ...

1 2 3 4 5 ...

↑ ↑ ↑ ↑ ↑

2 3 5 7 11 ...,

dann sind alle diese Teilmengen immer noch gleichmächtig mit der Mächtigkeit von $\mathbb{N}$, d.h. es ist

$|\mathbb{Z}|^+ = |\mathbb{Z}|^- = |\mathbb{P}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$

(vgl. z.B. Ebbinghaus 1994, S. 139). Da also alle diese Mengen abzählbar unendlich sind, gelten die folgenden transfiniten arithmetischen Gesetze:

a) $\aleph_0 + n = n + \aleph_0 = \aleph_0$

b) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

c) $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0 = n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

d) $\aleph_0 = \aleph_0^n$

e) $\aleph_0^{\aleph_0} = n^{\aleph_0}$

2. Die transfinite Addition unterscheidet sich somit in grundlegender Weise von der finiten. Diesen Sachverhalt hat Kronthaler richtig dahingehend interpretiert, dass er von „qualitativen Abbrüchen“ zwischen den einzelnen transfiniten Zahlklassen ausging:

$\aleph_0 \quad \lceil \quad \aleph_1 \quad \lceil \quad \aleph_2 \quad \lceil \quad \ldots$

Der Aufbau von $\mathbb{N}$ ist additiv, der von TZ superadditiv (etwa bzgl. des Maßes der Mächtigkeit):[269] card T_n + card T_m $\lessdot$ card T_{n+m}, $\forall$ n,m $\in \mathbb{N}$.

Allerdings zeigt dies nur einen quantitativen Aspekt des Vergleichs. Zu beachten ist, daß in der A-Mathematik die Additivität NUR im Endlichen gilt, Σ Teile = Ganzes, im Unendlichen dagegen im gewissen Sinne das paradoxe Gegenteil:

$\aleph_0 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0^n$

mehr noch: Das Unendliche wird ja gerade dadurch definiert, daß ein Teil nicht länger kleiner als das Ganze sein muß, sondern ihm gleichen kann:

vgl. card ($\{1,2,3,4,5,\ldots\ldots\}$) = card ($\{2,4,6,8,\ldots\ldots\}$)

Allein dies sollte den QUALITÄTSUNTERSCHIED zwischen Endlichem und Unendlichem (und allgemein zwischen den verschieden Alephs $\aleph$) zeigen.

Etwas ist nur relativ Größe oder Nichtgröße. Es ist nur in Beziehung auf andere Größen...eins von beiden. Es giebt also nur verschiedene Arten von Größen, die in Beziehung aufeinander nie ganz (absolut) vereinigt, aber relativ, zur Nothdurft, vereinigt, in Eine Gattung gebracht oder gegeneiander bestimmt werden können. Novalis(119),3,126*

**Die QUALITATIVE UNTERSCHIEDENHEIT DER ENDLICHEN und UNENDLICHEN GRÖßEN WIRD AUCH HIER ERKANNT. Hamburger (56), S. 77*

Auch durch die Superadditivität kann mit TZ höchstens die $\aleph_0$–Mächtigkeit erreicht werden, und dies auch nur im Grenzfall ($\S$). Die Frage lautet aber nicht mehr, ob mit Hilfe der Superadditivität oder MdQ..,höhere Mächtigkeiten als $\aleph_0$ erreichbar sind, sondern zur quantitativen Betrachtungsweise muß eine qualitative hinzutreten.

Für die Kardinaltität sind die Unterschiede der Alephs $\aleph$ von Cantors ת–Reihe nämlich tatsächlich keine der Quantität mehr, sondern der Qualität; genauso wie für die Ordinalität jeder Hiatus in der transifiniten Zählreihe die Kontexturgrenze zweier verschiedener Qualitäten darstellt, d.h. 1, ω, $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot 3$,......sind diskontextural. Jedes Aleph steht auf einer anderen Reflexionsebene, genauso wie jedes Omega. Zwar sind die Alephs der "Größe" nach anzuordnen, sie bleiben aber quantitativ unvergleichbar; diese ת–Ordnung ist eine der Qua-

das Quantum ist die aufgehobene Qualität Hegel (57), 5. S.279

Die Unendlichkeit des Quantums ist dahin bestimmt worden, daß sie das negative Jenseits desselben ist, das es aber an ihm selbst hat. DIES JENSEITS IST DAS QUALITATIVE ÜBERHAUPT, Hegel(57),5, S.372

In der klassischen Mathematik gibt es also qualitative Unterschiede erst im Unendlichen. **Etwas vereinfacht gesagt, liegt der Grund darin, dass im finiten Bereich eine Zahl der Form (k+1) eben nur die Stelle (k+1) in der betreffenden Zahlenreihe repräsentiert, aber nicht die um 1 vermehrte Menge {k} ihrer Vorgängerzahlen**, d.h. es gilt NICHT: $1 \subset 2 \subset 3 \subset \ldots \subset n$ ($n \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{R}$, usw.).

Genauso ist es aber in der Peirceschen Semiotik, die in dieser Hinsicht eine bereits von Maser (1973, S. 37) festgestellte transklassische Struktur aufweist, insofern die vollständige Definition der Zeichenrelation nach Bense (1979, S. 53) wie folgt ist:

$ZR = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)))$,

d.h. hier gilt im Gegensatz zur klassischen Mathematik

$1 \subset 2 \subset 3$ ($\subset$ ...).

In anderen Worten: **Die Drittheit vereinigt die Menge der Erstheit und der Zweitheit und zeigt nicht nur eine Nachfolgerelation der Zweitheit an.** Aus diesem Grunde kann man leicht zeigen, dass sich in der semiotischen Mathematik die Unendlichkeit und mit ihr die Qualität bereits im „finiten" Bereich zeigt:

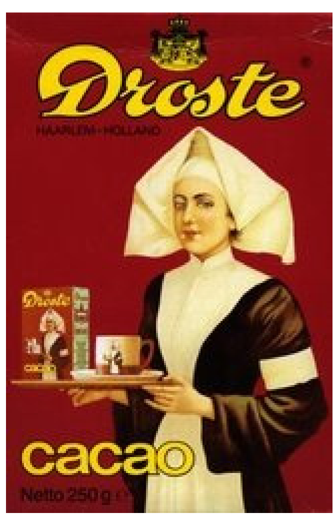
1. $ZR = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)))$,

2. $ZR = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow (1 \rightarrow 2)) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3))))$,

3. $ZR = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2))) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2)) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)))))$,

4. $ZR = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2)))) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2))) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2)) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3))))))$, usw.

Man erhält auf diese Weise also selbst-zirkuläre Mirimanoff-Serien, der Effekt wird entweder auf Grund einer bekannten französischen Schmelzkäsemarke als „La vache qui rit"-Effekt oder auf Grund einer von M.C. Escher portraitierten holländischen Kakaomarke häufiger als „Droste-Effekt" benannt:



Genau den selben grundlegenden Sachverhalt, die Herübernahme von Qualitätsunterschieden aus dem Transfiniten ins Finite, treffen wir nun auch in der von Kronthaler geschaffenen Mathematik der Qualitäten an – sie tritt dort in der Form der unendlich vielen Nachfolger einer Tritozahl auf:

Treten in der A-Mathematik diese Qualitätsunterschiede erst im Unendlichen auf oder anders: treten in der A-Mathematik Qualitäten erst durch Einführung verschiedener Unendlichkeiten (Alephs!) auf, so werden diese in der MdQ ins Endliche hereingeholt; genauso wie durch Tz die Selbstreferentialität ins Endliche transponiert ist, die für die klassische Mathematik transzendent im Unend lichen liegt. (Der formale Ausdruck der ins Transzendente verlagerten Selbst-Referentialität und –Reflexivität eines transzendenten Gottes also : $\aleph_0^{\;n} = \aleph_0$![271]

Das Unendliche Quantum aber ist....die Wiederherstellung der QUALITÄT. (57),5,210
In diesem Begriff des UNENDLICHEN ist das QUANTUM wahrhaft zu einem QUALITATIVEN Dasein vollendet; Hegel (57) 5, S. 296

Diese Mächtigkeiten, die Cantorschen Alephs, waren für Cantor etwas Heiliges, gewissermaßen die Stufen, die zum Throne der Unendlichkeit, zum Throne GOTTES emporführen. Kowalewski in (106) S. 110

Eine weitere Eigenart dieser transzendenten Mathematik wird durch die MdQ ins Endliche geholt: die nämlich, das im Unendlichen jede Kardinalzahl UNENDLICH viele "Nachfolger" hat: etwa $\aleph_0, \aleph_0+1, \aleph_0+2, \ldots \overset{!}{=} \aleph_0$, weswegen ja die Ordinalzahlen in diesem Bereich eingeführt worden sind. In ח hat jedes Aleph genau einen "Nachfolger", es wird damit in gewisser Weise nur $\mathbb{N}$ iteriert!. Dagegen hat auch hier jede Ordinalzahl genau einen Nachfolger.

Während also Kardinalität und Ordinalität diesbezüglich auseinanderfallen, ja diese Begriffe in der A-Mathematik widersprüchlich sind, bilden sie TZ im ENDLICHEN ein Einheit , sie stellen sie stellen zwei Aspekte EINER Tz dar, sind in ihr nur Unter-schiedene.

Man bedenke aber, dass präzise dasselbe auch für die Semiotik nach der Definition von Bense (1979, S. 53) vorgegeben ist, denn die 3 Primzeichen oder Peirce-Zahlen haben ebenfalls unendlich viele Nachfolger:

$1^+ = \{2, (1\to2), (1\to(1\to2)), (1\to(1\to(1\to2)), (1\to(1\to(1\to(1\to2))), \ldots\}$

$2^+ = \{(3, ((1\to2)\to(1\to2\to3)), ((1\to(1\to2))\to(1\to(1\to2)\to3)), (1 \to ((1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3)))), (1 \to ((1 \to (1 \to (1\to2))) \to (1 \to (1 \to (1\to2)) \to (1 \to (1\to2) \to (1 \to ((1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3)))),)))), \ldots\}$

Bei den Peirce-Zahlen liegt also im Gegensatz zur jenseitigen Transzendenz transfiniter Zahlen eine („finite") diesseitige Transzendenz vor, welche die mathematische Semiotik in grosse Nähe zur qualitativ-mathematischen Theorie der Trito-Zahlen bringt.

Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Einführung in die Mengenlehre. 3. Aufl. Leipzig 1994

Maser, Siegfried, Grundlagen der allgemeinen Kommunikationstheorie. 2. Aufl. Berlin 1973

2.5.2011